Проблемы физики, математики и техники, № 3 (20), 2014

МАТЕМАТИКА

УДК 519.853

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПОДВИЖНЫХ ИНДЕКСОВ В ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧАХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С МНОГОГРАННЫМ МНОЖЕСТВОМ ИНДЕКСОВ

М.В. Кулагина

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь

THE ALGORITHM FOR DETERMINATION OF IMMOBILE INDIXES IN CONVEX SIP PROBLEMS WITH POLYHEDRAL INDEX SETS

M.V. Kulahina

Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Рассматриваются выпуклые задачи полубесконечного программирования с многогранным множеством индексов. Для этих задач описывается и обосновывается конечный алгоритм построения неподвижных индексов и их порядков неподвижности вдоль допустимых направлений. Приводится пример, иллюстрирующий работу алгоритма.

Ключевые слова: *полубесконечное программирование, выпуклое программирование, неподвижный индекс, порядок неподвижности, конус допустимых направлений, экстремальный луч.*

The convex Semi-Infinite Programming (SIP) problems with polyhedral index sets are considered. For these problems a finite algorithm for determination of immobile indixes and their immobility orders along the feasible directions is described and justified. An example illustrating the application of the algorithm is provided.

Keywords: *semi-infinite programming, convex programming, immobile index, immobility order, cone of feasible directions, extreme ray.*

Введение

Задачи полубесконечного программирования – это задачи нахождения экстремума некоторой функции на множестве, которое задается бесконечным числом ограничений в конечномерном пространстве.

В последние десятилетия продолжается активное исследование задач полубесконечной оптимизации [1], [2], поскольку они часто встречаются в различных областях математики и имеют большое практическое значение. Вопрос об условиях оптимальности является одним из основных направлений исследования задач полубесконечного программирования [3], [4]. Важную роль в данном вопросе играют условия регулярности [5], [6]. Почти все известные условия оптимальности для полубесконечного программирования предполагают выполнение тех или иных условий регулярности. Поскольку на практике условия регулярности часто нарушаются, то актуальным является доказательство новых условий оптимальности без требования выполнения условий регулярности [7].

В [8] был предложен новый подход в полубесконечной оптимизации на основе концепции неподвижных индексов и их порядков неподвижности. Этот подход позволяет сформулировать условия оптимальности для задач полубесконечного программирования с точки зрения условий оптимальности для конечномерных задач нелинейного программирования. В [8], [9] был описан алгоритм, находящий все неподвижные индексы и их порядки неподвижности для линейных задач полубесконечного программирования с одномерным и многомерным множеством индексов соответственно.

В данной статье исследуются выпуклые задачи полубесконечного программирования (ПБП) с многогранным множеством индексов. Для этих задач рассматриваются понятия неподвижных индексов и их порядков неподвижности, которые были введены в работе [8].

Основная цель статьи: основываясь на работах [9], [10], описать и обосновать конечный алгоритм, который определяет неподвижные индексы и их порядки неподвижности вдоль допустимых направлений в выпуклых задачах полубесконечного программирования.

1 Постановка задачи, необходимые определения и обозначения

Рассмотрим задачу полубесконечного программирования вида

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} c(x) \tag{1.1}$$
$$f(x,t)\le 0,\ \forall t\in T,$$

где

$$T=\{t\in\mathbb{R}^s : h_k^T t\le \Delta h_k,\ k\in K\}$$

– выпуклый многогранник, K – конечное множество индексов, вектора $h_k\in\mathbb{R}^s$ и числа $\Delta h_k,\ k\in K,$ заданы, функции $f(x,t),\ t\in T,\ c(x)$

выпуклые по $x \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что функция ограничения $f(x,t)$ достаточно гладкая по t и x. Здесь и далее символ ^{T} означает транспонирование.

Обозначим через X множество допустимых планов задачи (1.1):

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^n : f(x,t) \le 0, \forall t \in T\right\}. \qquad (1.2)$$

Для данного $t \in T$ обозначим $K_a(t) \subset K$ множество активных ограничений в t:

$$K_a(t) = \left\{k \in K : h_k^T t = \Delta h_k\right\}$$

и через $L(t)$ – множество допустимых направлений для индекса t в T:

$$L(t) = \left\{l \in \mathbb{R}^s : h_k^T l \le 0, k \in K_a(t)\right\}.$$

Введем согласно работе [8] следующие определения:

***Определение* 1.1.** *Будем говорить, что индекс* $\bar{t} \in T$ *– неподвижный в задаче* (1.1), *если* $f(x,\bar{t}) = 0, \forall x \in X.$

Обозначим через T^* множество всех неподвижных индексов задачи (1.1).

***Определение* 1.2.** *Будем говорить, что неподвижный индекс* $\bar{t} \in T^*$ *имеет порядок неподвижности* $q(\bar{t},\bar{l}), q(\bar{t},\bar{l}) \in \{0,1,...\}$, *вдоль допустимого направления* $\bar{l} \in L(\bar{t}), \bar{l} \ne 0$, *если*

1^0) $$\frac{d^i f(x,\bar{t}+\alpha\bar{l})}{d\alpha^i}\Big|_{\alpha=+0} = 0, \forall x \in X,$$
$$i = 0,...,q(\bar{t},\bar{l});$$

2^0) *существует вектор* $\tilde{x} = x(\bar{t},\bar{l}) \in X$ *такой, что* $$\frac{d^{q(\bar{t},\bar{l})+1} f(\tilde{x},\bar{t}+\alpha\bar{l})}{d\alpha^{(q(\bar{t},\bar{l})+1)}}\Big|_{\alpha=+0} \ne 0.$$

Здесь предполагаем, что

$$\left.\frac{d^0 f(x,\bar{t}+\alpha\bar{l})}{d\alpha^0}\right|_{\alpha=+0} = f(x,\bar{t}).$$

Согласно работе [9], множество допустимых направлений для индекса $\bar{t}$ может быть представлено в следующем виде:

$$L(\bar{t}) = \left\{l \in \mathbb{R}^s : l = \sum_{i\in\bar{P}} \beta_i \bar{b}_i + \sum_{i\in\bar{I}} \alpha_i \bar{a}_i,\ \alpha_i \ge 0, i \in \bar{I}\right\},$$

где вектора $\bar{b}_i, i \in \bar{P}$ – двунаправленные лучи, $\bar{a}_i, i \in \bar{I}$ – однонаправленные лучи, $\bar{P}$ и $\bar{I}$ – конечные множества индексов.

***Предположение* 1.1.** Предположим, что $X \ne 0$, множество T ограничено и

$$q(\bar{t},l) \le 1, l \in L(\bar{t}) \setminus \{0\}, \forall \bar{t} \in T^*.$$

Согласно работе [9] из Предположения 1.1 следует, что множество индексов T^* состоит из конечного числа элементов: $T^* = \{\bar{t}_j, j \in J_*\}$ с некоторым конечным множеством индексов J_*.

Целью данного исследования является описание и обоснование алгоритма, который для задачи (1.1) определит множество неподвижных индексов и их порядки неподвижности вдоль экстремальных лучей соответствующих множеств допустимых направлений.

2 Описание алгоритма

Для данного $x \in X$ обозначим через $T_a(x) \subset T$ множество активных индексов в x:

$$T_a(x) = \left\{t \in T : f(x,t) = 0\right\}.$$

Как было показано в работе [10], при выполнении Предположения 1.1 существует такой план $\bar{x} \in X$, что $|T_a(\bar{x})| < \infty$, т. е. множество активных индексов $T_a(\bar{x})$ допускает представление

$$T_a(\bar{x}) = \left\{\bar{t}_j, j \in \bar{J}\right\}, \left|\bar{J}\right| < \infty. \qquad (2.1)$$

Предположим, что известен допустимый план $\bar{x}$, удовлетворяющий (2.1). Заметим, здесь $T^* \subset T_a(\bar{x})$.

Далее будем использовать для данного $\bar{t}_j, j \in \bar{J}$, экстремальные лучи соответствующего множества допустимых направлений $L(\bar{t}_j)$:

$$b_i(j), i \in P(j), a_i(j), i \in I(j), j \in \bar{J}.$$

Поскольку правило построения этих векторов описано в работе [9], далее будем считать их заданными.

Введем обозначение

$$\tilde{I}(j) = \left\{i \in I(j) : \frac{\partial^T f(\bar{x},\bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) = 0\right\}, j \in \bar{J}.$$

Описанный ниже алгоритм основан на работе [9].

Инициализация. Установим $J_*^{(0)} := 0, k = 0.$

Общая итерация. На (k+1)-ой итерации алгоритма ($k \ge 0$) имеем следующие множества, построенные на предыдущих итерациях:

$$J_*^{(k)} \subset \bar{J}, I_0^{(k)}(j) \subset \tilde{I}(j), j \in J_*^{(k)}.$$

Заметим, что на первой итерации не используются множества $I_0^{(k)}(j) \subset \tilde{I}(j), j \in J_*^{(k)}$, так как множество $J_*^{(0)}$ пустое.

Для данного $j \in J_*^{(k)}$ обозначим

$$L_j^{(k)} := \left\{l \in \mathbb{R}^s : \|l\| = 1, l = \sum_{i\in P(j)} \beta_i b_i(j) + \sum_{i\in I_0^{(k)}(j)} \alpha_i a_i(j),\right.$$
$$\left.\alpha_i \ge 0, l^T \frac{\partial^2 f(\bar{x},\bar{t}_j)}{\partial t^2} l = 0\right\},$$

и построим следующее множество:

$$X^{(k+1)} := \left\{x \in \mathbb{R}^n : f(x,\bar{t}_j) \le 0, j \in \bar{J} \setminus J_*^{(k)},\right.$$
$$f(x,\bar{t}_j) = 0, \frac{\partial f^T(x,\bar{t}_j)}{\partial t} b_i(j) = 0, i \in P(j),$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f^T(x,\bar t_j)}{\partial t} a_i(j) = 0,\ i \in I_0^{(k)}(j),\\ &\frac{\partial f^T(x,\bar t_j)}{\partial t} a_i(j) \le 0,\ i \in \tilde I(j) \setminus I_0^{(k)}(j),\\ &l^T \frac{\partial^2 f(x,\bar t_j)}{\partial t^2} l \le 0,\ \forall l \in L_j^{(k)},\ j \in J_*^{(k)} \end{aligned}\right\}. \quad (2.2)$$

Можно показать, что $\bar x \in X^{(k+1)}$.

Для каждого $j \in \bar J \setminus J_*^{(k)}$ решаем вспомогательную задачу:

$$\min_{x \in X^{(k+1)}} f(x,\bar t_j). \quad (2.3)$$

Положим $x^{(j)} := \bar x$, если $\bar x$ – оптимальный план этой задачи, иначе в качестве $x^{(j)}$ возьмем другой вектор, удовлетворяющий следующим условиям:

$$x^{(j)} \in X^{(k+1)},\ f(x^{(j)},\bar t_j) < 0.$$

Положим

$$\Delta J_*^{(k+1)} := \left\{ j \in \bar J \setminus J_*^{(k)} : f(x^{(j)},\bar t_j) = 0 \right\}. \quad (2.4)$$

Для всех $i \in \tilde I(j) \setminus I_0^{(k)}(j),\ j \in J_*^{(k)}$, решаем следующую вспомогательную задачу:

$$\min_{x \in X^{(k+1)}} \frac{\partial f^T(x,\bar t_j)}{\partial t} a_i(j). \quad (2.5)$$

Положим $x^{(ji)} := \bar x$, если $\bar x$ – оптимальный план этой задачи, иначе в качестве $x^{(ji)}$ возьмем другой вектор, удовлетворяющий следующим условиям:

$$x^{(ji)} \in X^{(k+1)},\ \left(\frac{\partial f(x^{(ji)},\bar t_j)}{\partial t} \right)^T a_i(j) < 0.$$

Положим

$$\begin{aligned} \Delta I_0^{(k+1)}(j) = \Bigg\{ & i \in (\tilde I(j) \setminus I_0^{(k)}(j)) : \\ & \frac{\partial f^T(x^{(ji)},\bar t_j)}{\partial t} a_i(j) = 0 \Bigg\},\ j \in J_*^{(k)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Если $\Delta J_*^{(k+1)} = \varnothing$ и $\Delta I_0^{(k+1)}(j) = \varnothing,\ j \in J_*^{(k)}$, то останавливаем алгоритм с

$$T^* = \{\bar t_j,\ j \in J_* := J_*^{(k)}\}; \quad (2.7)$$

$$q(\bar t_j, a_i(j)) = 1,\ i \in I_0(j) := I_0^{(k)}(j),$$

$$q(\bar t_j, a_i(j)) = 0,\ i \in I_*(j) := I(j) \setminus I_0^{(k)}(j),\ j \in J_*.$$

Иначе, строим множества

$$J_*^{(k+1)} := J_*^{(k)} \cup \Delta J_*^{(k+1)},$$

$$I_0^{(k+1)}(j) := I_0^{(k)}(j) \cup \Delta I_0^{(k+1)}(j),\ j \in J_*^{(k)},$$

$$I_0^{(k+1)}(j) := \varnothing,\ j \in \Delta J_*^{(k+1)}$$

и переходим к следующей итерации.

3 Обоснование алгоритма

В дальнейшем будем считать, что для данного алгоритма выполняется Предположение 1.1, и, следовательно, число итераций данного алгоритма является конечным.

***Теорема* 3.1.** *Пусть выпуклая задача* (1.1) *удовлетворяет Предположению* 1.1. *Построенные в алгоритме индексы* $\bar t_j,\ j \in J_*$ *и только они являются неподвижными индексами в задаче* (1.1). *Их порядки неподвижности определяются следующим образом*

$$\begin{aligned} &q(\bar t_j, l) = 1,\ l \in L_j^0,\\ &q(\bar t_j, l) = 0,\ l \in L_j^* := L(\bar t_j) \setminus L_j^0,\ j \in J_*. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В начале докажем несколько вспомогательных лемм, которые будем использовать при доказательстве теоремы.

***Лемма* 3.1.** *Пусть даны множество* $\tilde X \subset \mathbb{R}^n$ *и точка* $\bar t \in T$ *такие, что*

(1) $\tilde X$ *– выпуклое множество*;

(2) *для любого* $t \in T$ *функция* $f(x,t)$ *– выпукла по* $x \in \mathbb{R}^n$;

(3) *справедливо равенство* $f(x,\bar t) = 0$ *для любого вектора* $x \in \tilde X$.

Тогда для любого $l \in L(\bar t)$ *функция* $\frac{\partial f^T(x,\bar t)}{\partial t} l$ *является выпуклой по* x *на* $\tilde X$.

Доказательство. Возьмем любые $x_1, x_2 \in \tilde X$. Следовательно для них выполняется

$$f(x_1,\bar t) = 0,\ f(x_2,\bar t) = 0. \quad (3.2)$$

Обозначим $x(\lambda) = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Так как множество $\tilde X$ выпуклое, то $x(\lambda) \in \tilde X$ и, с учетом условия (3) данной леммы, имеем

$$f(x(\lambda),\bar t) = 0,\ \lambda \in [0,1]. \quad (3.3)$$

Поскольку функция $f(x,t)$ выпуклая по $x \in \tilde X$, то

$$\begin{aligned} &f(x(\lambda),t) \le \lambda f(x_1,t) +\\ &+(1-\lambda) f(x_2,t),\ \lambda \in [0,1]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Рассмотрим любое $l \in L(\bar t)$. Существует достаточно малое $\bar\theta > 0 : \forall \theta \in (0,\bar\theta)$ можно указать $t : t = \bar t + \theta l,\ t \in T$. Подставим разложение в ряд Тейлора функции $f(x(\lambda),t)$ при достаточно малом θ первого порядка в (3.4):

$$\begin{aligned} &f(x(\lambda),\bar t) + \frac{\partial f^T(x(\lambda),\bar t)}{\partial t} \theta l + o(\theta) \le\\ &\le \lambda \left(f(x_1,\bar t) + \frac{\partial f^T(x_1,\bar t)}{\partial t} \theta l \right) +\\ &+(1-\lambda) \left(f(x_2,\bar t) + \frac{\partial f^T(x_2,\bar t)}{\partial t} \theta l \right) + o(\theta). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Учитывая (3.2) и (3.3), разделим (3.5) на θ и найдем предел при $\theta \to 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f^T(x(\lambda),\bar t)}{\partial t} l \le \lambda \frac{\partial f^T(x_1,\bar t)}{\partial t} l +\\ &+(1-\lambda) \frac{\partial f^T(x_2,\bar t)}{\partial t} l,\quad \lambda \in [0,1],\ l \in L(\bar t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Таким образом из (3.6) следует, что для любого $l \in L(\bar{t})$ функция $\frac{\partial f^T(x,\bar{t})}{\partial t} l$ выпуклая по x на $\tilde{X}$. □

***Лемма* 3.2.** *Рассмотрим точку $\bar{t} \in T$. Пусть заданы множества $\tilde{X} \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{I}_0 \subset \bar{I}$, $\tilde{L}(\bar{t}) \subset L(\bar{t})$ такие, что*

(*i*) *$\tilde{X}$ – выпуклое множество*;

(*ii*) *для любого $t \in T$ функция $f(x,t)$ – выпуклая по $x \in \mathbb{R}^n$*;

(*iii*) *справедливы равенства*

$$f(x,\bar{t}) = 0, \frac{\partial f^T(x,\bar{t})}{\partial t} l = 0, \forall l \in \tilde{L}(\bar{t})$$

для любого $x \in \tilde{X}$.

Тогда для любого $l \in \tilde{L}(\bar{t})$ функция $l^T \frac{\partial^2 f(x,\bar{t})}{\partial t^2} l$ – выпуклая по x на $\tilde{X}$.

Доказательство. Возьмем любые $x_1, x_2 \in \tilde{X}$. Обозначим $x(\lambda) = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Так как множество $\tilde{X}$ выпуклое, очевидно, $x(\lambda) \in \tilde{X}$, $\lambda \in [0,1]$. Следовательно, для $x_1, x_2, x(\lambda)$ выполняется:

$$f(x_1,\bar{t}) = 0, f(x_2,\bar{t}) = 0, f(x(\lambda),\bar{t}) = 0;$$

$$\frac{\partial f^T(x_1,\bar{t})}{\partial t} l = 0, \frac{\partial f^T(x_2,\bar{t})}{\partial t} l = 0, \qquad (3.7)$$

$$\frac{\partial f^T(x(\lambda),\bar{t})}{\partial t} l = 0, \forall l \in \tilde{L}(\bar{t}), \lambda \in [0,1].$$

Так как функция $f(x,t)$ выпуклая по x на $\tilde{X}$, то

$$f(x(\lambda),t) \le \lambda f(x_1,t) + (1-\lambda) f(x_2,t), \lambda \in [0,1]. \quad (3.8)$$

Рассмотрим любое $l \in \tilde{L}(\bar{t})$. Существует достаточно малое $\bar{\theta} > 0 : \forall \theta \in (0,\bar{\theta})$ можно указать $t : t = \bar{t} + \theta l, t \in T$. Подставим разложение в ряд Тейлора функции $f(x(\lambda),t)$ при достаточно малом θ второго порядка в (3.8):

$$\begin{gathered} f(x(\lambda),\bar{t}) + \frac{\partial f^T(x(\lambda),\bar{t})}{\partial t}\theta l + \\ + \frac{1}{2}\theta^2 l^T \frac{\partial^2 f(x(\lambda),\bar{t})}{\partial^2 t} l + o(\theta^2) \le \\ \lambda(f(x_1,\bar{t}) + \frac{\partial f^T(x_1,\bar{t})}{\partial t}\theta l + \\ + \frac{1}{2}\theta^2 l^T \frac{\partial^2 f(x_1,\bar{t})}{\partial^2 t} l) + \\ +(1-\lambda)(f(x_2,\bar{t}) + \frac{\partial f^T(x_2,\bar{t})}{\partial t}\theta l + \\ + \frac{1}{2}\theta^2 l^T \frac{\partial^2 f(x_2,\bar{t})}{\partial^2 t} l) + o(\theta^2). \end{gathered} \qquad (3.9)$$

Учитывая условие $l \in \tilde{L}(\bar{t})$ и (3.7), получим, что первые два члена разложения в ряд Тейлора исчезают и остается:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\theta^2 l^T \frac{\partial^2 f(x(\lambda),\bar{t})}{\partial^2 t} l + o(\theta^2) \le \\ \le \lambda\left(\frac{1}{2}\theta^2 l^T \frac{\partial^2 f(x_1,\bar{t})}{\partial^2 t} l\right) + \\ +(1-\lambda)\left(\frac{1}{2}\theta^2 l^T \frac{\partial^2 f(x_2,\bar{t})}{\partial^2 t} l\right) + o(\theta^2). \end{gathered}$$

Разделив на $\frac{1}{2}\theta^2$ и найдя предел при $\theta \to 0$:

$$\begin{gathered} l^T \frac{\partial^2 f(x(\lambda),\bar{t})}{\partial^2 t} l \le \lambda\left(l^T \frac{\partial^2 f(x_1,\bar{t})}{\partial^2 t} l\right) + \\ +(1-\lambda)\left(l^T \frac{\partial^2 f(x_2,\bar{t})}{\partial^2 t} l\right), l \in \tilde{L}(\bar{t}), \lambda \in [0,1]. \end{gathered} \qquad (3.10)$$

Таким образом из (3.10) следует, что $l^T \frac{\partial^2 f(x,\bar{t})}{\partial t^2} l$ для любого $l \in \tilde{L}(\bar{t})$ является выпуклой функцией по x на $\tilde{X}$. □

***Лемма* 3.3.** *Пусть выполняется Предположение* 1.1, *тогда на каждой* $(k+1)$*-ой итерации алгоритма справедливы следующие утверждения:*

1) *точки $\bar{t}_j, j \in J_*^{(k)}$, являются неподвижными, т. е. $\bar{t}_j \in T^*, j \in J_*^{(k)}$*;

2) *выполняются равенства*

$$q(\bar{t}_j, l) = 1, l \in L_j^{(k)}, j \in J_*^{(k)};$$

3) *верны включения*

$X \subset X^{(k+1)} \subset X^{(k)} \subset X^{(0)}$, *где* $X^{(0)} = \mathbb{R}^n$;

4) *множество $X^{(k+1)}$ выпуклое.*

Доказательство. Докажем лемму по индукции. Для $k=0$ имеем $J_*^{(0)} = \varnothing, I_0^{(0)}(j) = \varnothing, \ j \in J_*^{(0)}$. Следовательно, утверждения 1), 2) данной леммы очевидны для $k=0$. Из (1.2), (2.2) имеем

$$X \subset X^{(1)} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x,\bar{t}_j) \le 0, j \in \bar{J}\}.$$

Тогда утверждения 3, 4 справедливы для $k=0$.

Предположим, что все утверждения 1)–4) выполняются для $(k+1) > 0, (k+1) < k_*$. Докажем утверждения 1)–4) для $(k+2)$-ой итерации.

Рассмотрим утверждение 1). Известно, что $J_*^{(k+1)} = J_*^{(k)} \bigcup \Delta J_*^{(k+1)}$. Из предположения о справедливости данного утверждения для $(k+1)$-ой итерации, имеем $\bar{t}_j \in T^*, j \in J_*^{(k)}$. Осталось доказать, что $\bar{t}_j \in T^*, j \in \Delta J_*^{(k+1)}$. Учитывая соотношение (2.4), где $x^{(j)}$ – оптимальный план задачи (2.3), имеем для любого $x \in X^{(k+1)}$

$$f(x,\bar{t}_j) = 0, j \in \Delta J_*^{(k+1)}.$$

Из этого, в силу включения $X \subset X^{(k+1)}$ имеем, что $\bar{t}_j \in T^*, j \in \Delta J_*^{(k+1)}$ являются неподвижными индексами также, следовательно, $\bar{t}_j \in T^*, j \in J_*^{(k+1)}$ – неподвижные индексы.

Рассмотрим утверждение 2). Известно, что $I_0^{(k+1)}(j) = I_0^{(k)}(j) \bigcup \Delta I_0^{(k+1)}(j)$. Из предположения о справедливости данного утверждения для $(k+1)$-ой итерации, имеем $q(\overline{t}_j, l) = 1, l \in L_j^{(k)}$, $j \in J_*^{(k)}$. На $(k+2)$-ой итерации добавляются индексы $i \in \Delta I_0^{(k+1)}(j), j \in J_*^{(k)}$ и $i \in P(j), j \in J_*^{(k+1)}$. Учитывая соотношение (2.6), где $x^{(ji)}$ – оптимальный план задачи (2.5), имеем для любого $x \in X^{(k+1)}$

$$\frac{\partial f^T(x^{(ji)}, \overline{t}_j)}{\partial t} a_i(j) = 0, i \in \Delta I_0^{(k+1)}(j), j \in J_*^{(k)}.$$

Тогда, учитывая Предположение 1.1, правило построение множества $l \in L_j^{(k+1)}, j \in J_*^{(k+1)}$ и в силу включения $X \subset X^{(k+1)}$ получаем:

$$q(\overline{t}_j, l) = 1, l \in L_j^{(k+1)}, j \in J_*^{(k+1)}.$$

Рассмотрим утверждения 3), 4). Из предположения о справедливости данного утверждения для $(k+1)$-ой итерации, имеем $X \subset X^{(k+1)}$, где в начале $(k+1)$-ой итерации описанного алгоритма оно имеет вид (2.2). В конце $(k+1)$-ой итерации, в следствии пройденных шагов по алгоритму, его можно будет записать следующим образом:

$$X^{(k+1)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : f(x, \overline{t}_j) \le 0, j \in \overline{J} \setminus J_*^{(k+1)}, \right.$$
$$f(x, \overline{t}_j) = 0, j \in J_*^{(k+1)};$$
$$\frac{\partial f^T(x, \overline{t}_j)}{\partial t} b_i(j) = 0, i \in P(j),$$
$$\frac{\partial f^T(x, \overline{t}_j)}{\partial t} a_i(j) = 0, i \in I_0^{(k+1)}(j),$$
$$\frac{\partial f^T(x, \overline{t}_j)}{\partial t} a_i(j) \le 0, i \in \tilde{I}(j) \setminus I_0^{(k+1)}(j),$$
$$\left. l^T \frac{\partial^2 f(x, \overline{t}_j)}{\partial t^2} l \le 0, \forall l \in L_j^{(k)}, j \in J_*^{(k)} \right\}.$$

Тогда множество $X^{(k+2)}$ можно представить как

$$X^{(k+2)} = X^{(k+1)} \bigcap \widehat{X}_1^{(k+1)} \bigcap \widehat{X}_2^{(k+1)},$$

где

$$\widehat{X}_1^{(k+1)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : l^T \frac{\partial^2 f(x, \overline{t}_j)}{\partial t^2} l \le 0, \right.$$
$$\left. \forall l \in L_j^{(k+1)}, j \in J_*^{(k)} \right\},$$

$$\widehat{X}_2^{(k+1)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial f^T(x, \overline{t}_j)}{\partial t} b_i(j) = 0, i \in P(j); \right.$$
$$\frac{\partial f^T(x, \overline{t}_j)}{\partial t} a_i(j) \le 0, i \in \tilde{I}(j);$$
$$\left. l^T \frac{\partial^2 f(x, \overline{t}_j)}{\partial t^2} l \le 0, \forall l \in L_j^{(k+1)}, j \in \Delta J_*^{(k+1)} \right\}.$$

Из ранее сделанного предположения имеем $X^{(k+1)}$ – выпуклое. Покажем, что $X^{(k+1)} \bigcap \widehat{X}_1^{(k+1)}$, $X^{(k+1)} \bigcap \widehat{X}_2^{(k+1)}$ – выпуклые.

Рассмотрим множество $X^{(k+1)} \bigcap \widehat{X}_1^{(k+1)}$. Зафиксируем $j \in J_*^{(k)}$. Возьмем любые $x_1, x_2 \in X^{(k+1)} \bigcap \widehat{X}_1^{(k+1)}$. Поскольку $x_1, x_2 \in \widehat{X}_1^{(k+1)}$, то для них будет выполняться:

$$l^T \frac{\partial^2 f(x_1, \overline{t}_j)}{\partial t^2} l \le 0, l^T \frac{\partial^2 f(x_2, \overline{t}_j)}{\partial t^2} l \le 0, \quad (3.11)$$
$$\forall l \in L_j^{(k+1)}, j \in J_*^{(k)}.$$

Заметим, что также $x_1, x_2 \in X^{(k+1)}$. Обозначим $x(\lambda) = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$. Очевидно $x(\lambda) \in X^{(k+1)}$, поскольку оно выпуклое по предположению. Для любого $l \in L_j^{(k+1)}$ функции $l^T \dfrac{\partial^2 f(x, \overline{t}_j)}{\partial t^2} l$ выпуклые по x на множестве $X^{(k+1)}$ по лемме 3.2, для этого достаточно положить в ней

$$\tilde{X} = X^{(k+1)}, \overline{t} = \overline{t}_j, \overline{I}_0 = I_0^{(k+1)}(j),$$
$$\tilde{L}(\overline{t}) = L_j^{(k+1)}, j \in J_*^{(k)}.$$

Тогда из выпуклости данных функций имеем

$$l^T \frac{\partial^2 f(x(\lambda), \overline{t}_j)}{\partial t^2} l \le \lambda \left(l^T \frac{\partial^2 f(x_1, \overline{t}_j)}{\partial t^2} l \right) +$$
$$+(1-\lambda) \left(l^T \frac{\partial^2 f(x_2, \overline{t}_j)}{\partial t^2} l \right),$$
$$\lambda \in [0,1], \forall l \in L_j^{(k+1)}, j \in J_*^{(k)}.$$

С учетом (3.11) и того, что сумма двух не положительных чисел является не положительным числом, можем положить:

$$l^T \frac{\partial^2 f(x(\lambda), \overline{t}_j)}{\partial t^2} l \le 0, \forall l \in L_j^{(k+1)}, \lambda \in [0,1],$$

что и означает, что $x(\lambda) \in \widehat{X}_1^{(k+1)}$. Следовательно $X^{(k+1)} \bigcap \widehat{X}_1^{(k+1)}$ – выпуклое.

Рассмотрим множество $X^{(k+1)} \bigcap \widehat{X}_2^{(k+1)}$. Зафиксируем $j \in \Delta J_*^{(k+1)}$. Возьмем любые

$$x_1, x_2 \in X^{(k+1)} \bigcap \widehat{X}_2^{(k+1)}.$$

Поскольку $x_1, x_2 \in \widehat{X}_2^{(k+1)}$, то для них будет выполняться:

$$\frac{\partial f^T(x_1, \overline{t}_j)}{\partial t} b_i(j) = 0, \frac{\partial f^T(x_2, \overline{t}_j)}{\partial t} b_i(j) = 0, i \in P(j),$$
$$\frac{\partial f^T(x_1, \overline{t}_j)}{\partial t} a_i(j) \le 0,$$
$$\frac{\partial f^T(x_2, \overline{t}_j)}{\partial t} a_i(j) \le 0, i \in \tilde{I}(j), \quad (3.12)$$

$$l^T \frac{\partial^2 f(x_1,\overline{t}_j)}{\partial t^2} l \le 0,\ l^T \frac{\partial^2 f(x_2,\overline{t}_j)}{\partial t^2} l \le 0,\ \forall l \in L_j^{(k+1)}.$$

Заметим, что также $x_1, x_2 \in X^{(k+1)}$. Положим

$$x(\lambda) = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,\ \lambda \in [0,1].$$

Очевидно $x(\lambda) \in X^{(k+1)}$.

a) Функции $\frac{\partial f^T(x(\lambda),\overline{t}_j)}{\partial t} b_i(j), i \in P(j)$ выпуклые по x на множестве $X^{(k+1)}$, что следует из леммы 3.1, для этого достаточно положить в ней $\tilde{X} = X^{(k+1)}, \overline{t} = \overline{t}_j, j \in \Delta J_*^{(k+1)}$. Тогда из выпуклости данных функций имеем

$$\sum_{i\in P(j)} \frac{\partial f^T(x(\lambda),\overline{t}_j)}{\partial t} \beta_i b_i(j) \le$$

$$\le \lambda \sum_{i\in P(j)} \frac{\partial f^T(x_1,\overline{t}_j)}{\partial t} \beta_i b_i(j) +$$

$$+(1-\lambda) \sum_{i\in P(j)} \frac{\partial f^T(x_2,\overline{t}_j)}{\partial t} \beta_i b_i(j),\ \lambda \in [0,1].$$

С учетом (3.12) имеем

$$\sum_{i\in P(j)} \frac{\partial f^T(x(\lambda),\overline{t}_j)}{\partial t} \beta_i b_i(j) \le 0,\ \lambda \in [0,1].$$

Зафиксировав $i^* \in P(j)$, положим $\beta_{i^*} = \pm 1$, $\beta_i = 0$, $i \in P(j) \setminus i^*$ получим

$$\frac{\partial f^T(x(\lambda),\overline{t}_j)}{\partial t} \beta_{i^*} b_{i^*}(j) \le 0,\ \lambda \in [0,1],\ \beta_{i^*} = \pm 1.$$

Так как данное неравенство должно выполняться при $\beta_{i^*} = \pm 1$, тогда

$$\frac{\partial f^T(x(\lambda),\overline{t}_j)}{\partial t} b_{i^*}(j) = 0,\ \lambda \in [0,1].$$

Таким образом, для всех $i \in P(j)$ будем иметь

$$\frac{\partial f^T(x(\lambda),\overline{t}_j)}{\partial t} \beta_i b_i(j) = 0,\ i \in P(j),\ \lambda \in [0,1].$$

b) Функции $\frac{\partial f^T(x,\overline{t}_j)}{\partial t} a_i(j), i \in \tilde{I}(j)$ являются выпуклыми по x на множестве $X^{(k+1)}$ по лемме 3.1, для этого достаточно положить в ней $\tilde{X} = X^{(k+1)}, \overline{t} = \overline{t}_j, j \in \Delta J_*^{(k+1)}$. Из выпуклости данных функций и (3.12) следует, что

$$\frac{\partial f^T(x(\lambda),\overline{t}_j)}{\partial t} a_i(j) \le 0,\ i \in \tilde{I}(j),\ \lambda \in [0,1].$$

c) Функции $l^T \frac{\partial^2 f(x,\overline{t}_j)}{\partial t^2} l, \forall l \in L_j^{(k+1)}$ – выпуклые по x на множестве $X^{(k+1)}$ по лемме 3.2, для этого достаточно положить в ней

$$\tilde{X} = X^{(k+1)}, \overline{t} = \overline{t}_j, \overline{I}_0 = \varnothing,$$

$$\tilde{L}(\overline{t}) = L_j^{(k+1)},\ j \in \Delta J_*^{(k+1)}.$$

Из выпуклости данных функций и (3.12) следует, что $l^T \frac{\partial^2 f(x(\lambda),\overline{t}_j)}{\partial t^2} l \le 0,\ \forall l \in L_j^{(k+1)},\ \lambda \in [0,1].$

Тогда из a), b), c) следует, что $x(\lambda) \in \widehat{X}_2^{(k+1)}$. Следовательно, $X^{(k+1)} \bigcap \widehat{X}_2^{(k+1)}$ выпуклое. Следовательно, $X^{(k+2)}$ – выпуклое, как пересечение выпуклых множеств, и $X^{(k+2)} \subset X^{(k+1)}$. А так как $X \subset X^{(k+1)} \Rightarrow X \subset X^{(k+2)}$. □

Рассмотрим последнюю итерацию алгоритма $(k+1)$. Из леммы 3.3 следует, что поскольку $\overline{t}_j, j \in J_*$ – неподвижные индексы и $q(\overline{t}_j, l) = 1$, $l \in L_j^{(k)}, j \in J_*$, то для любого $x \in X^{(k+1)}$ выполняются соотношения:

$$f(x,\overline{t}_j) = 0,$$

$$\frac{\partial f^T(x,\overline{t}_j)}{\partial t} b_i(j) = 0,\ i \in P(j), \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial f^T(x,\overline{t}_j)}{\partial t} a_i(j) = 0,\ i \in I_0(j),\ j \in J_*.$$

Доказательство следующих лемм основывается на работах [9], [10].

Лемма 3.4. *Пусть выпуклая задача* (1.1) *удовлетворяет Предположению* 1.1. *Рассмотрим некоторый неподвижный индекс* $\overline{t}_j$ $(j \in J_*)$ *и соответствующее множество* $I_0(j)$, *построенное согласно* (2.7) *на последней итерации алгоритма. Тогда существует вектор* $x^* = x^*(\overline{t}_j) \in X$ *такой, что*

$$l^T \frac{\partial^2 f(x^*,\overline{t}_j)}{\partial^2 t} l < 0,$$

$$\forall l \in L_j^0 = \left\{ l \in \mathbb{R}^s : \|l\| = 1, l = \sum_{i\in P(j)} \beta_i b_i(j) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i\in I_0(j)} \alpha_i a_i(j),\ \alpha_i \ge 0,\ i \in I_0(j) \right\}. \tag{3.14}$$

Доказательство. Из леммы 3.3 имеем

$$q(\overline{t}_j, l) = 1,\ l \in L_j^0. \tag{3.15}$$

Обозначим через $(\widehat{Q})$ следующую задачу:

$$(\widehat{Q}): \qquad \min_{\xi,x} \xi$$

$$x \in X,\ l^T \frac{\partial^2 f(x,\overline{t}_j)}{\partial t^2} l \le \xi,\ \forall l \in L_j^0.$$

В задаче $(\widehat{Q})$, множество X выпуклое, целевая функция и функции ограничений – выпуклые по $x \in \mathbb{R}^n$. Эти ограничения удовлетворяют условию Слейтера 1-го типа [10]:

$$\exists (\overline{x}, \overline{\xi}) : l^T \frac{\partial^2 f(\overline{x},\overline{t}_j)}{\partial t^2} l \le \overline{\xi},\ \forall l \in L_j^0,$$

где

$$\overline{x} \in X,\ \overline{\xi} = \max_{\|l\|=1} l^T \frac{\partial^2 f(\overline{x},\overline{t}_j)}{\partial t^2} l + 1.$$

Следовательно, они удовлетворяют условию Слейтера 2-го типа также. Заметим, что из утверждения 1 из [10] следует, что существуют $n+1$ вектора $l_i \in L_j^0, i=1,...,n+1,$ такие, что $val(\widehat{Q}) = val(\widehat{Q}_D),$ где $val(A)$ – оптимальное значение целевой функции задачи $A,$ а задача $\widehat{Q}_D$ – следующая:

$$(\widehat{Q}_D): \qquad \min_{\xi,x} \xi$$

$$x \in X, l_i^T \frac{\partial^2 f(x,\bar{t}_j)}{\partial t^2} l_i \le \xi, i=1,...,n+1.$$

Из (3.15) и определения 1.2 следует, что для каждого $l_i, i=1,...,n+1,$ существует $x^{(i)} \in X,$ удовлетворяющий неравенству

$$l_i^T \frac{\partial^2 f(x^{(i)},\bar{t}_j)}{\partial t^2} l_i < 0, i=1,...,n+1.$$

Так как $\bar{t}_j$ – неподвижный индекс и $x^{(i)}$ – допустимое решение задачи (1.1), тогда для любого $k \in \{1,...,n+1\}, k \ne i$ выполняется $l_k^T \frac{\partial^2 f(x^{(i)},\bar{t}_j)}{\partial t^2} l_k \le 0.$

Рассмотрим вектор $\breve{x} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{(k)}}{n+1}.$ Очевидно $\breve{x} \in X.$ Подставим этот вектор в левую часть ограничения задачи $(\widehat{Q}_D)$ и из выпуклости функции $l^T \frac{\partial^2 f(x,\bar{t}_j)}{\partial t^2} l$ по x на $X,$ получим

$$l_i^T \frac{\partial^2 f(\breve{x},\bar{t}_j)}{\partial t^2} l_i \le \sum_{k=1}^{n+1} \left(l_i^T \frac{\partial^2 f(x^{(k)},\bar{t}_j)}{\partial t^2} l_i / (n+1) \right) < 0,$$
$$i=1,...,n+1.$$

Тогда получим, что $val(\widehat{Q}_D) < 0.$ Следовательно, $val(\widehat{Q}) < 0$ что и предполагает существование вектора $x^* \in X: \ l^T \frac{\partial^2 f(x^*,\bar{t}_j)}{\partial^2 t} l < 0, l \in L_j^0.$ □

***Лемма* 3.5.** *Рассмотрим выпуклую задачу* (1.1), *удовлетворяющую Предположению* 1.1. *Пусть* $\bar{t}_j, I_0(j), j \in J_*$ *– построенные в алгоритме индексы и множества. Тогда существует вектор* $\tilde{x} \in X,$ *такой, что*

$$f(\tilde{x},\bar{t}_j)=0, \frac{\partial f^T(\tilde{x},\bar{t}_j)}{\partial t} b_i(j)=0, i \in P(j),$$
$$\frac{\partial f^T(\tilde{x},\bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j)=0, i \in I_0(j),$$
$$\frac{\partial f^T(\tilde{x},\bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j)<0, i \in I(j) \setminus I_0(j),$$
$$l^T \frac{\partial^2 f(\tilde{x},\bar{t}_j)}{\partial t^2} l < 0, \forall l \in L_j^0, \ j \in J_*;$$
$$f(\tilde{x},t)<0, t \in T \setminus \{\bar{t}_j, j \in J_*\},$$

где L_j^0 определенно в (3.14).

Доказательство. Предположим, что алгоритм останавливается на $(k+1)$ итерации, т. е. $k_* = k+1.$ Тогда имеем множества $J_* \subset \bar{J},$ $I_0(j) \subset \tilde{I}(j), \ j \in J_*,$ и вектора

$$x^{(j)} \in X^{(k+1)}, j \in \bar{J} \setminus J_*,$$
$$x^{(ji)} \in X^{(k+1)}, i \in \tilde{I}(j) \setminus I_0(j), j \in J_*$$

такие, что

$$f(x^{(j)},\bar{t}_j)<0, j \in \bar{J} \setminus J_*,$$
$$\frac{\partial f^T(x^{(ji)},\bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j)<0, i \in \tilde{I}(j) \setminus I_0(j), j \in J_*.$$

Положим

$$\hat{x} = \left(\sum_{j \in \bar{J} \setminus J_*} x^{(j)} + \sum_{j \in J_*} \sum_{i \in \tilde{I}(j) \setminus I_0(j)} x^{(ji)} \right) / r,$$

где $r = \left| \bar{J} \setminus J_* \right| + \sum_{j \in J_*} | \tilde{I}(j) \setminus I_0(j) |.$ Поскольку множество $X^{(k+1)}$ выпуклое по лемме 3.3 и функция $f(x,t)$ выпуклая по $x \in X^{(k+1)},$ и для $i \in \tilde{I}(j) \setminus I_0(j),$ $j \in J_*$ функции $\frac{\partial f^T(x^{(ji)},\bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j)$ – выпуклые по x на $X^{(k+1)}$ по лемме 3.1, то $\hat{x} \in X^{(k+1)}$ и

$$f(\hat{x},\bar{t}_j)<0, j \in \bar{J} \setminus J_*,$$
$$\frac{\partial f^T(\hat{x},\bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j)<0, i \in \tilde{I}(j) \setminus I_0(j), j \in J_*. \tag{3.16}$$

Рассмотрим вектор $\tilde{x}^* = \sum_{j \in J_*} \frac{x^{*j}}{|J_*|},$ где $x^{*j} \in X,$ $j \in J_*$ – вектор из леммы 3.4. Тогда из выпуклости функций $l^T \frac{\partial^2 f(x,\bar{t}_j)}{\partial t^2} l, l \in L_j^0, j \in J_*$ по $x \in X$ следует, что $\tilde{x}^*$ удовлетворяет условию

$$l^T \frac{\partial^2 f(\tilde{x}^*,\bar{t}_j)}{\partial t^2} l < 0, \forall l \in L_j^0, j \in J_*.$$

С учетом того, что $\tilde{x}^* \in X$ и (3.13), то для $\tilde{x}^*$ будут выполняться следующие соотношения:

$$f(\tilde{x}^*,\bar{t}_j)=0, \frac{\partial f^T(\tilde{x}^*,\bar{t}_j)}{\partial t} b_i(j)=0, i \in P(j),$$
$$\frac{\partial f^T(\tilde{x}^*,\bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j)=0, i \in I_0(j),$$
$$\frac{\partial f^T(\tilde{x}^*,\bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) \le 0, i \in I(j) \setminus I_0(j),$$
$$l^T \frac{\partial^2 f(\tilde{x}^*,\bar{t}_j)}{\partial t^2} l < 0, \forall l \in L_j^0, j \in J_*.$$

Рассмотрим вектор $z = \frac{1}{2}(\tilde{x}^* + \bar{x}) \in X,$ где $\bar{x}$ – вектор введенный в пункте 3. Тогда по построению:

$$f(z,\bar{t}_j) \le 0, \ j \in \bar{J} \setminus J_*, \ f(z,\bar{t}_j)=0, \ j \in J_*;$$
$$\frac{\partial f^T(z,\bar{t}_j)}{\partial t} b_i(j)=0, i \in P(j),$$

$$\frac{\partial f^T(z,\bar t_j)}{\partial t}a_i(j)=\begin{cases}<0,\ i\in I(j)\setminus\tilde I(j),\\ \le 0,\ i\in\tilde I(j),\end{cases}$$

$$l^T\frac{\partial^2 f(z,\bar t_j)}{\partial t^2}l<0,\ \forall l\in L_j^0,$$

$$l^T\frac{\partial^2 f(z,\bar t_j)}{\partial t^2}l\le 0,\ \forall l\in L_j^1,\ j\in J_*; \quad (3.17)$$

$$f(z,t)<0,\ \forall t\in T\setminus\bigcup\{\bar t_j,\ j\in\bar J\},$$

где L_j^0 определенно согласно (3.14),

$$L_j^1=\Big\{l\in\mathbb{R}^s:\|l\|=1,\ l=\sum_{i\in P(j)}\beta_i b_i(j)+\sum_{i\in I(j)}\alpha_i a_i(j),$$

$$\alpha_i\ge 0,\ i\in I(j),\ \frac{\partial f^T(z,\bar t_j)}{\partial t}l=0\Big\},\ j\in J_*.$$

Для данного $\lambda\in[0,1]$ рассмотрим новый вектор $x(\lambda)=(1-\lambda)z+\lambda\hat x$. Очевидно $x(\lambda)\in X^{(k+1)}$. Заметим, что здесь вектор $\hat x\in X^{(k+1)}$ удовлетворяет (3.16). Принимая во внимание выпуклость $f(x,t)$ по x, имеем

$$f(x(\lambda),t)\le(1-\lambda)f(z,t)+\lambda f(\hat x,t). \quad (3.18)$$

Принимая во внимание выпуклость функций и соотношения (3.13), (3.16), (3.17), можем заключить, что для $0<\lambda<1$ выполняются следующие соотношения:

$$f(x(\lambda),\bar t_j)<0,\ j\in\bar J\setminus J_*,$$

$$f(x(\lambda),\bar t_j)=0,\ \frac{\partial f^T(x(\lambda),\bar t_j)}{\partial t}b_i(j)=0,\ i\in P(j),$$

$$\frac{\partial f^T(x(\lambda),\bar t_j)}{\partial t}a_i(j)=0,\ i\in I_0(j), \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial f^T(x(\lambda),\bar t_j)}{\partial t}a_i(j)<0,\ i\in I(j)\setminus I_0(j),$$

$$l^T\frac{\partial^2 f(x(\lambda),\bar t_j)}{\partial t^2}l<0,\ \forall l\in L_j^0,\ j\in J_*.$$

Покажем, что для достаточно малых $\lambda>0$ существует $\varepsilon(\lambda)>0$ такое, что

$$\varepsilon(\lambda)\to+0 \text{ при } \lambda\to+0$$

$$\text{и } f(x(\lambda),t)<0,\ t\in T\setminus\bigcup_{j\in J_*}T_{\varepsilon(\lambda)}(\bar t_j), \quad (3.20)$$

где $T_\varepsilon(t)=\{\tau\in T:\|t-\tau\|\le\varepsilon\}$.

Возьмем некоторое $\bar\varepsilon>0$ такое, чтобы оно было в раза меньше, чем минимальное расстояние между двумя любыми $\bar t_j,\ j\in J_*$ и $\varepsilon:0<\varepsilon<\bar\varepsilon$. Обозначим

$$\tilde T_\varepsilon=T\setminus\bigcup_{j\in J_*}T_\varepsilon(\bar t_j),$$

$$T_\varepsilon^+=cl\left\{t\in\tilde T_\varepsilon:f(\hat x,t)>0\right\},\ \varepsilon\in(0,\bar\varepsilon],$$

где clT – замыкание множества T. Принимая во внимание соотношения (3.18), (3.19) имеем

$$f(x(\lambda),t)<0,\ \forall\lambda\in(0,1)\ \forall t\in\tilde T_\varepsilon\setminus T_\varepsilon^+,\varepsilon\in(0,\bar\varepsilon]. \quad (3.21)$$

Рассмотрим функцию

$$\bar\lambda_\varepsilon(t)=\frac{f(z,t)}{f(z,t)-f(\hat x,t)},\ t\in T_\varepsilon^+,\ \varepsilon\in(0,\bar\varepsilon].$$

Покажем, что $\bar\lambda_\varepsilon(t)>0,\ t\in T_\varepsilon^+,\varepsilon\in(0,\bar\varepsilon]$. По построению имеем $f(\hat x,\bar t_j)<0,\ j\in\bar J\setminus J_*$. Из этого следует, что для любого $\varepsilon\in(0,\bar\varepsilon]$ верно включение $T_\varepsilon^+\subset cl\left(T\setminus\bigcup_{j\in\bar J}T_\varepsilon(\bar t_j)\right)$. Тогда, учитывая это и соотношения (3.17) имеем

$$f(z,t)<0,\ \forall t\in T_\varepsilon^+,\ \varepsilon\in(0,\bar\varepsilon]. \quad (3.22)$$

Обозначим

$$\bar\delta(\varepsilon)=\min_{t\in T_\varepsilon^+}|f(z,t)|,\ \varepsilon\in(0,\bar\varepsilon],$$

$$\delta^*=\sup_{t\in T^+}\left|f(z,t)-f(\hat x,t)\right|<\infty,$$

где $T^+=cl\left\{t\in T:f(\hat x,t)>0\right\}$. В силу соотношения (3.22) справедливо неравенство $\bar\delta(\varepsilon)>0$, $\varepsilon\in(0,\bar\varepsilon]$. Тогда для $t\in T_\varepsilon^+$ получаем

$$\bar\lambda_\varepsilon(t)=\frac{f(z,t)}{f(z,t)-f(\hat x,t)}\ge\frac{\bar\delta(\varepsilon)}{\delta^*}:=\upsilon(\varepsilon)>0,\ \varepsilon\in(0,\bar\varepsilon].$$

Положим $\bar\upsilon(\varepsilon)=min\{\varepsilon,\upsilon(\varepsilon)\}>0$ при $\varepsilon\in(0,\bar\varepsilon]$. Тогда

$$f(x(\lambda),t)<0,\ \forall t\in T_\varepsilon^+,\ \forall\lambda\in(0,\bar\upsilon(\varepsilon)),\ \varepsilon\in(0,\bar\varepsilon]$$

и с учетом соотношения (3.21) получаем

$$f(x(\lambda),t)<0,\ \forall t\in\tilde T_\varepsilon,\ \forall\lambda\in(0,\bar\upsilon(\varepsilon)),\ \varepsilon\in(0,\bar\varepsilon].$$

Заметим, что из построения функции $\bar\upsilon(\varepsilon)$, $\varepsilon\in(0,\bar\varepsilon]$ видно, что она обладает следующими свойствами: • $\bar\upsilon(\varepsilon)>0$ при $\varepsilon>0$; • $\bar\upsilon(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Покажем, что функция $\bar\upsilon(\varepsilon),\ \varepsilon\in(0,\bar\varepsilon]$ также является неубывающей. Для начала покажем, что функция $\upsilon(\varepsilon),\ \varepsilon\in(0,\bar\varepsilon]$ является неубывающей, т. е. $\forall\varepsilon_1,\varepsilon_2:0<\varepsilon_1<\varepsilon_2\le\bar\varepsilon\Rightarrow\upsilon(\varepsilon_1)\le\upsilon(\varepsilon_2)$. Поскольку $\varepsilon_1<\varepsilon_2$, то $T_{\varepsilon_2}^+\subseteq T_{\varepsilon_1}^+$. Тогда, учитывая построение функции $\upsilon(\varepsilon)$, получим:

$$\forall\varepsilon_1,\varepsilon_2:0<\varepsilon_1<\varepsilon_2\le\bar\varepsilon\Rightarrow$$

$$\min_{t\in T_{\varepsilon_1}^+}|f(z,t)|\le\min_{t\in T_{\varepsilon_2}^+}|f(z,t)|.$$

Таким образом функция $\upsilon(\varepsilon),\ \varepsilon\in(0,\bar\varepsilon]$ является неубывающей, а из этого следует, что и функция $\bar\upsilon(\varepsilon),\ \varepsilon\in(0,\bar\varepsilon]$ является неубывающей как минимум неубывающих функций.

Заметим, что функция $\bar\upsilon(\varepsilon),\ \varepsilon\in(0,\bar\varepsilon]$ обладает еще одним свойством – непрерывность, что следует непосредственно из непрерывности функции $\upsilon(\varepsilon),\ \varepsilon\in(0,\bar\varepsilon]$.

Определим $\varepsilon^*:=\bar\varepsilon>0,\ \lambda^*:=\bar\upsilon(\varepsilon^*)>0$. Тогда по построению имеем, что для любого

$\lambda \in (0, \lambda^*]$ существует $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*] : \lambda = \bar{\upsilon}(\varepsilon)$. Построим обратную функцию следующим образом: для любого $\lambda \in (0, \lambda^*]$ поставим в соответствии число $\varepsilon(\lambda) = \inf\limits_{\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]} \varepsilon$.

Покажем, что $\varepsilon(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$. Предположим противное, т. е. $\exists \bar{\bar{\varepsilon}} > 0 : \varepsilon(\lambda) \to \bar{\bar{\varepsilon}}$ при $\lambda \to 0$. По построению имеем $\bar{\upsilon}(\varepsilon(\lambda)) = \lambda$, перейдя к пределу в данном равенстве при $\lambda \to 0$ получим: $\lim\limits_{\lambda \to 0} \bar{\upsilon}(\varepsilon(\lambda)) = 0, \bar{\upsilon}(\bar{\bar{\varepsilon}}) = 0$, а это противоречит тому, что $\bar{\upsilon}(\bar{\bar{\varepsilon}}) > 0$.

Из всего выше изложенного следует, что для $\lambda \in (0, \lambda^*)$ существует $\varepsilon(\lambda)$ такое, что $\varepsilon(\lambda) \to +0$ при $\lambda \to 0$ и

$$f(x(\lambda), t) < 0, \forall t \in T \setminus \bigcup_{j \in J_*} T_{\varepsilon(\lambda)}(\bar{t}_j).$$

Таким образом доказано соотношение (3.20).

Для $j \in J_*$ соотношения (3.19) являются достаточным условием того, что точка $\bar{t}_j$ является строгим локальным решением задачи $\max\limits_{\tau \in T} f(x(\lambda), \tau), \forall \lambda \in (0,1)$. Тогда из определения строгого локального максимума следует, что для любого $\lambda \in (0,1)$ существует число $\breve{\varepsilon}(\lambda) > 0$, такое что

$$\begin{gathered} f(x(\lambda), t) < f(x(\lambda), \bar{t}_j) = 0, \\ t \in T_{\breve{\varepsilon}(\lambda)}(\bar{t}_j) \setminus \{\bar{t}_j\}, j \in J_*. \end{gathered} \tag{3.23}$$

Зафиксируем $\bar{\lambda} \in (0,1)$. Тогда для него существует $\breve{\varepsilon}(\bar{\lambda}) =: \tilde{\varepsilon} > 0 : f(x(\bar{\lambda}), t) < 0, \forall t \in T_{\tilde{\varepsilon}}(\bar{t}_j) \setminus \{\bar{t}_j\}$, $j \in J_*$.

Покажем, что

$$\begin{gathered} \forall \lambda : \lambda \in (0, \bar{\lambda}) \text{ и } \tilde{\varepsilon} > 0 : f(x(\lambda), t) < 0, \\ \forall t \in T_{\tilde{\varepsilon}}(\bar{t}_j) \setminus \{\bar{t}_j\}, j \in J_*. \end{gathered}$$

Предположим противное, т. е. $\exists \bar{\bar{\lambda}} : \bar{\bar{\lambda}} \in (0, \bar{\lambda})$ $\exists j_0 \in J_*$, $\exists \bar{t}_{j_0} \in T_{\tilde{\varepsilon}}(\bar{t}_{j_0}) \setminus \{\bar{t}_{j_0}\}$: $f(x(\bar{\bar{\lambda}}), \bar{t}_{j_0}) \ge 0$.

Поскольку $\bar{\bar{\lambda}} < \bar{\lambda}$, то $\bar{\lambda}$ можно представить в виде $\bar{\lambda} = \bar{\bar{\lambda}} + \Delta\lambda, \Delta\lambda > 0$. Учитывая это и соотношение (3.18) имеем

$$\begin{aligned} 0 &\le f(x(\bar{\bar{\lambda}}), \bar{t}_{j_0}) \le (1 - \bar{\bar{\lambda}}) f(z, \bar{t}_{j_0}) + \bar{\bar{\lambda}} f(\hat{x}, \bar{t}_{j_0}) = \\ &= (1 - \bar{\lambda} + \Delta\lambda) f(z, \bar{t}_{j_0}) + (\bar{\lambda} - \Delta\lambda) f(\hat{x}, \bar{t}_{j_0}) = \\ &= (1 - \bar{\lambda}) f(z, \bar{t}_{j_0}) + \bar{\lambda} f(\hat{x}, \bar{t}_{j_0}) + \\ &+ \Delta\lambda (f(z, \bar{t}_{j_0}) - f(\hat{x}, \bar{t}_{j_0})). \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{gathered} (1 - \bar{\lambda}) f(z, \bar{t}_{j_0}) + \bar{\lambda} f(\hat{x}, \bar{t}_{j_0}) + \\ + \Delta\lambda (f(z, \bar{t}_{j_0}) - f(\hat{x}, \bar{t}_{j_0})) \ge 0. \end{gathered} \tag{3.24}$$

Поскольку $f(z, \bar{t}_{j_0}) < 0$,

$$(1 - \bar{\lambda}) f(z, \bar{t}_{j_0}) + \bar{\lambda} f(\hat{x}, \bar{t}_{j_0}) < 0,$$

$\Delta\lambda > 0$ тогда, чтобы выполнялось соотношение (3.24) должно выполняться

$$\begin{cases} f(\hat{x}, \bar{t}_{j_0}) > 0, \\ f(z, \bar{t}_{j_0}) - f(\hat{x}, \bar{t}_{j_0}) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\hat{x}, \bar{t}_{j_0}) > 0, \\ f(\hat{x}, \bar{t}_{j_0}) < 0. \end{cases}$$

Данная система противоречива, это и доказывает, что

$$\begin{gathered} \forall \lambda : \lambda \in (0, \bar{\lambda}) \text{ и } \breve{\varepsilon}(\lambda) = \tilde{\varepsilon} > 0 : \\ f(x(\lambda), t) < 0, \forall t \in T_{\tilde{\varepsilon}}(\bar{t}_j) \setminus \{\bar{t}_j\}, j \in J_*. \end{gathered} \tag{3.25}$$

Из условия $\varepsilon(\lambda) \to +0$ при $\lambda \to 0$ и соотношения (3.25) следует, что всегда существует такое $\lambda^* \in (0, \bar{\lambda})$, что $\tilde{\varepsilon} > \varepsilon(\lambda^*)$. Тогда из этого и соотношений (3.20) и (3.23) получим, что существует λ^* такое, что

$$f(x(\lambda^*), t) < 0, \forall t \in T \setminus \{\bar{t}_j, j \in J_*\}. \tag{3.26}$$

Таким образом, из соотношений (3.19), (3.26) получили, что данный вектор $x(\lambda^*)$ для достаточно малого λ^* является планом задачи, т. е. $x(\lambda^*) \in X$ и удовлетворяет условиям доказываемого утверждения. □

Доказательство теоремы 3.1. Из леммы 3.3 следует, что индексы $\bar{t}_j, j \in J_*$ являются неподвижными и их порядки неподвижности определяются согласно (3.1). Из леммы 3.5 следует, что это все неподвижные индексы. □

Заметим здесь также был построен вектор $\tilde{x} \in X$ такой, что

$$\begin{gathered} T_a(\tilde{x}) = T^*, \\ \frac{\partial f^T(\tilde{x}, \bar{t}_j)}{\partial t} a_i(j) < 0, i \in I(j) \setminus I_0(j), \\ l^T \frac{\partial^2 f(\tilde{x}, \bar{t}_j)}{\partial^2 t} l < 0, l \in L_j^0, j \in J_*, \\ f(\tilde{x}, t) < 0, \forall t \in T \setminus \{\bar{t}_j, j \in J_*\}. \end{gathered}$$

4 Пример

Проиллюстрируем работу описанного алгоритма на примере. Пусть

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4, t = (t_1, t_2)^T \in \mathbb{R}^2$$

и

$$\begin{gathered} f_1(x,t) := 5t_2 x_1^2 - t_1 x_2^2 - (t_1 + 1)^2 t_2 x_3 + \\ + t_2^2 x_4^2 - 2t_2^2 - (t_1 + 1)^2, \\ f_2(x,t) := t_1 x_2^2 - x_1 - (2t_1^3 + t_2^3) x_3 - t_1^2 x_4 + 2t_2^2 - t_2, \\ T_1 := \{t \in \mathbb{R}^2 : -3 \le t_1 \le -1, 0 \le t_2 \le 2, t_2 - t_1 \le 4\}, \\ T_2 := \{t \in \mathbb{R}^2 : t_1 \ge 0, t_2 \ge 0, t_2 + t_1 \le 4\}. \end{gathered}$$

Рассмотрим выпуклую задачу полубесконечного программирования с многогранным множеством индексов вида:

$$\begin{gathered} \min(-x_2 - 8x_3 + x_4^2), \\ f_1(x,t) \le 0, \forall t \in T_1, f_2(x,t) \le 0, \forall t \in T_2. \end{gathered}$$

Легко проверить, что $\bar{x} = (0,0,1,1)$ является допустимым планом данной задачи. Множество активных индексов для $\bar{x}$ имеет вид $T_a(\bar{x}) = \{t^{(1)}, t^{(2)}, t^{(3)}\}$, где $t^{(1)} = (-1,0)^T \in T_1$, $t^{(2)} = (0,0)^T \in T_2$, $t^{(3)} = (0,1)^T \in T_2$.

Используя правила, описанные в работе [9], построим для каждой активной точки экстремальные лучи в соответствующем множестве индексов: для $t^{(1)} \in T_1$ имеем $a_1(1) = (0,1)$, $a_2(1) = (-1,0)$, для $t^{(2)} \in T_2$ имеем $a_1(2) = (0,1)$, $a_2(2) = (1,0)$, для $t^{(3)} \in T_2$ имеем $b_1(3) = (0,1)$, $a_1(3) = (1,0)$.

Заметим, что

$$\frac{\partial^T f_1(\bar{x}, t^{(1)})}{\partial t} a_1(1) = \frac{\partial^T f_1(\bar{x}, t^{(1)})}{\partial t} a_2(1) = 0,$$

$$\frac{\partial^T f_2(\bar{x}, t^{(2)})}{\partial t} a_2(2) = 0, \frac{\partial^T f_2(\bar{x}, t^{(3)})}{\partial t} a_1(3) = 0,$$

$$\frac{\partial^T f_2(\bar{x}, t^{(2)})}{\partial t} a_1(2) \neq 0.$$

Рассмотрим следующие множества:

$$\bar{J} = \{1,2,3\}, \tilde{I}(1) = \{1,2\}, \tilde{I}(2) = \{2\}, \tilde{I}(3) = \{1\}.$$

На первой итерации алгоритма $k = 0, J_*^{(0)} = \varnothing$. Построим множество

$$X^{(1)} = \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x, t^{(1)}) \le 0,$$
$$f_2(x, t^{(2)}) \le 0, f_2(x, t^{(3)}) \le 0\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^4 : x_2^2 \le 0, -x_1 \le 0, -x_1 - x_3 + 1 \le 0\}.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу для каждого $j \in \bar{J} = \{1,2,3\}$.

Когда $j = 1$, тогда задача имеет форму

$$\min_{x \in X^{(1)}} f_1(x, t^{(1)}), \text{ т. е. } (\min_{x \in X^{(1)}} x_2^2).$$

Тогда оптимальным решением будет

$$x^{(1)} = \bar{x} = (0,0,1,1) : f_1(x^{(1)}, t^{(1)}) = 0.$$

Когда $j = 2$, тогда задача имеет форму

$$\min_{x \in X^{(1)}} f_2(x, t^{(2)}), \text{ т. е. } (\min_{x \in X^{(1)}} - x_1).$$

Положим $x^{(2)} = (1,0,0,0) : f_2(x^{(2)}, t^{(2)}) < 0$.

Когда $j = 3$, тогда задача имеет форму

$$\min_{x \in X^{(1)}} f_2(x, t^{(3)}), \text{ т. е. } (\min_{x \in X^{(1)}} - x_1 - x_3 + 1).$$

Положим $x^{(3)} = (1,0,1,0) : f_2(x^{(3)}, t^{(3)}) < 0$.

Найдем множества

$$\Delta J_*^{(1)} = \{j \in \bar{J} : f(x^{(j)}, t^{(j)}) = 0\} = \{1\}, \Delta I_0^{(1)}(1) = \varnothing.$$

Поскольку $\Delta J_*^{(1)} = \{1\} \neq \varnothing$, переходим к следующей итерации с $J_*^{(1)} = J_*^{(0)} \cup \Delta J_*^{(1)} = \{1\}$, $I_0^{(1)}(1) = \Delta I_0^{(1)}(1) = \varnothing$ и $\bar{J} \setminus J_*^{(1)} = \{2,3\}$.

На следующей итерации $(k = 1)$ строим множество

$$X^{(2)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : f_1(x, t^{(1)}) = 0, \right.$$
$$f_2(x, t^{(2)}) \le 0, f_2(x, t^{(3)}) \le 0,$$
$$\frac{\partial f_1^T(x, t^{(1)})}{\partial t} a_1(1) \le 0, \frac{\partial f_1^T(x, t^{(1)})}{\partial t} a_2(1) \le 0,$$
$$\left. l^T \frac{\partial^2 f_1^T(x, t^{(1)})}{\partial t^2} l \le 0, l \in L_1^{(1)} \right\}.$$

Заметим, $L_1^{(1)} = \varnothing$ (поскольку $P(1) = \varnothing, I_0^{(1)}(1) = \varnothing$), тогда

$$X^{(2)} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_2^2 = 0, -x_1 \le 0,$$
$$-x_1 - x_3 + 1 \le 0, 5x_1^2 \le 0, x_2^2 \le 0\}.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу для каждого $j \in \bar{J} \setminus J_* = \{2,3\}$.

Когда $j = 2$, тогда задача имеет форму

$$\min_{x \in X^{(2)}} f_2(x, t^{(2)}), \text{ т. е. } (\min_{x \in X^{(2)}} - x_1).$$

Положим оптимальное решение $x^{(2)} = (0,0,1,1)$: $f_2(x^{(2)}, t^{(2)}) = 0$.

Когда $j = 3$, тогда задача имеет форму

$$\min_{x \in X^{(2)}} f_2(x, t^{(3)}), \text{ т. е. } (\min_{x \in X^{(2)}} - x_1 - x_3 + 1).$$

Положим $x^{(3)} = (0,0,2,0) : f_2(x^{(3)}, t^{(3)}) < 0$.

Построим множество

$$\Delta J_*^{(2)} = \{j \in \{2,3\} : f(x^{(j)}, t^{(j)}) = 0\} = \{2\}.$$

Поскольку $\tilde{I}(1) \setminus I_0^{(1)}(1) = \{1,2\}$, рассмотрим решение следующих вспомогательных задач:

При $i = 1$ задача имеет форму

$$\min_{x \in X^{(2)}} \frac{\partial f_1^T(x, t^{(1)})}{\partial t} a_1(1), \text{ т. е. } (\min_{x \in X^{(2)}} 5x_1^2).$$

Положим оптимальное решение

$$x^{(11)} = x^0 = (0,0,1,1) : \frac{\partial f_1^T(x^{(11)}, t^{(1)})}{\partial t} a_1(1) = 0.$$

При $i = 2$ задача имеет форму

$$\min_{x \in X^{(2)}} \frac{\partial f_1^T(x, t^{(1)})}{\partial t} a_2(1), \text{ т. е. } (\min_{x \in X^{(2)}} x_2^2).$$

Положим оптимальное решение

$$x^{(12)} = \bar{x} = (0,0,1,1) : \frac{\partial f_1^T(x^{(12)}, t^{(1)})}{\partial t} a_2(1) = 0.$$

В соответствии с алгоритмом, определяем множество

$$\Delta I_0^{(2)}(1) = \left\{ i \in \{1,2\} : \frac{\partial f_1^T(x^{(1i)}, t^{(1)})}{\partial t} a_i(1) = 0 \right\} = \{1,2\}.$$

Построим множества

$$J_*^{(2)} = J_*^{(1)} \bigcup \Delta J_*^{(2)} = \{1,2\},$$

$$I_0^{(2)}(1) = I_0^{(1)}(1) \bigcup \Delta I_0^{(2)}(1) = \{1,2\}, I_0^{(2)}(2) = \varnothing,$$

переходим к следующей итерации.

На следующей итерации $(k = 2)$ строим множество

$$X^{(3)} = \left\{ x \in R^4 : f_1(x, t^{(1)}) = 0, f_1(x, t^{(2)}) = 0, \right.$$
$$f_2(x, t^{(3)}) \le 0,$$

$$\frac{\partial f_1^T(x,t^{(1)})}{\partial t}a_i(1)=0, i\in I_0^{(2)}(1),$$
$$l^T\frac{\partial^2 f_1^T(x,t^{(1)})}{\partial t^2}l\le 0, l\in L_1^{(2)},$$
$$\frac{\partial f_2^T(x,t^{(2)})}{\partial t}a_i(2)\le 0,\ i\in \tilde I(2),$$
$$\left. l^T\frac{\partial^2 f_2^T(x,t^{(2)})}{\partial t^2}l\le 0,\ l\in L_2^{(2)}\right\}.$$

Учитывая, что

$$L_1^{(2)}=\left\{l\in\mathbb{R}^2:\|l\|=1, l=\sum_{i\in I_0^{(2)}(1)}\alpha_i a_i(1)=\begin{pmatrix}-\alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix},\right.$$
$$\alpha_i\ge 0,\ l^T\frac{\partial^2 f_1(\bar x,t^{(1)})}{\partial t^2}l=$$
$$=(-\alpha_2\alpha_1)\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix}=$$
$$\left.=-2\alpha_2^2-2\alpha_1^2\ne 0\right\}=\varnothing,$$

$L_2^{(2)}=\varnothing$ (поскольку $P(2)=\varnothing, I_0^{(2)}(2)=\varnothing$), перепишим множество $X^{(3)}$ в виде

$$X^{(3)}=\{x\in\mathbb{R}^4: x_2^2=0, -x_1=0,$$
$$-x_1-x_3+1\le 0, 5x_1^2=0,\ x_2^2\le 0.\}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу для $j\in\bar J\setminus J_*^{(2)}=\{3\}$.

Задача имеет форму

$$\min_{x\in X^{(3)}} f_2(x,t^{(3)}),\ \text{ т. е. } (\min_{x\in X^{(3)}} -x_1-x_3+1).$$

Положим $x^{(3)}=(0,0,2,1): f_2(x^{(3)},t^{(3)})<0.$

Тогда множество $\Delta J_*^{(3)}=\varnothing$. Рассмотрим множество $J_*^{(2)}$. Здесь $\tilde I(1)\setminus I_0^{(2)}(1)=\varnothing$. Поскольку $\tilde I(2)\setminus I_0^{(2)}(2)=\{2\}$ рассмотрим решение следующей вспомогательной задачи:

$$\min_{x\in X^{(3)}}\frac{\partial f_2^T(x,t^{(2)})}{\partial t}a_2(2),\ \text{ т. е. } (\min_{x\in X^{(3)}} x_2^2).$$

Положим оптимальное решение

$$x^{(22)}=\bar x=(0,0,1,1):\frac{\partial f_2^T(x^{(22)},t^{(2)})}{\partial t}a_2(2)=0.$$

В соответствии с алгоритмом, имеем

$$\Delta I_0^{(3)}(2)=\left\{i\in\tilde I(2):\frac{\partial f_2^T(x^{(2i)},t^{(2)})}{\partial t}a_i(2)=0\right\}=\{2\}.$$

Построим множества

$$J_*^{(3)}=J_*^{(2)}\bigcup\Delta J_*^{(3)}=\{1,2\},$$
$$I_0^{(3)}(1)=I_0^{(2)}(1)=\{1,2\}, I_0^{(3)}(2)=\{2\},$$

переходим к следующей итерации.

На следующей итерации $(k=4)$ строим множество

$$X^{(4)}=\left\{x\in\mathbb{R}^4: f_1(x,t^{(1)})=0,\right.$$
$$f_2(x,t^{(2)})=0,\ f_2(x,t^{(3)})\le 0,$$

$$\frac{\partial f_1^T(x,t^{(1)})}{\partial t}a_i(1)=0,\ i\in I_0^{(3)}(1),$$
$$l^T\frac{\partial^2 f_1^T(x,t^{(1)})}{\partial t^2}l\le 0,\ l\in L_1^{(3)},$$
$$\frac{\partial f_2^T(x,t^{(2)})}{\partial t}a_i(2)=0,\ i\in I_0^{(3)}(2),$$
$$\left. l^T\frac{\partial^2 f_2^T(x,t^{(2)})}{\partial t^2}l\le 0,\ l\in L_2^{(3)}\right\}.$$

Учитывая $L_1^{(3)}=L_1^{(2)}=\varnothing$ и

$$L_2^{(3)}=\left\{l\in\mathbb{R}^2:\|l\|=1, l=\sum_{i\in I_0^{(3)}(2)}\alpha_i a_i(2)=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ 0\end{pmatrix},\right.$$
$$\alpha_i\ge 0,\ l^T\frac{\partial^2 f_2(\bar x,t^{(2)})}{\partial t^2}l=$$
$$\left.=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ 0\end{pmatrix}=-2\alpha_1^2\ne 0\right\}=\varnothing,$$

имеем

$$X^{(4)}=\{x\in\mathbb{R}^4: x_2^2=0, -x_1=0,$$
$$-x_1-x_3+1\le 0, 5x_1^2=0\}.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу для $j\in\bar J\setminus J_*^{(3)}=\{3\}$.

Задача имеет форму

$$\min_{x\in X^{(4)}} f_2(x,t^{(3)}),\ \text{ т. е. } (\min_{x\in X^{(4)}} -x_1-x_3+1).$$

Положим $x^{(3)}=(0,0,2,1): f_2(x^{(3)},t^{(3)})<0.$ Тогда множество $\Delta J_*^{(4)}=\varnothing.$

Поскольку $\tilde I(1)\setminus I_0^{(3)}(1)=\varnothing, \tilde I(2)\setminus I_0^{(3)}(2)=\varnothing,$ то $\Delta I_0^{(4)}(j)=\varnothing,\ j\in J_*^{(3)}.$

Тогда $\Delta J_*^{(4)}=\varnothing, \Delta I^{(4)}(1)=\varnothing, \Delta I^{(4)}(2)=\varnothing$ и, следовательно, останавливаем алгоритм с $T^*=\{t^{(1)},t^{(2)}\}.$

Для найденных неподвижных индексов порядки неподвижности вдоль соответствующих экстремальных лучей являются

$$q(t^{(1)},a_i(1))=1,\ i\in I_0(1)=\{1,2\};$$
$$q(t^{(2)},a_2(2))=1,\ i\in I_0(2)=\{2\},$$
$$q(t^{(2)},a_1(2))=0,\ i\in I(2)\setminus I_0(2)=\{1\}.$$

Заключение

В данной работе были рассмотрены выпуклые задачи полубесконечного программирования с многогранным множеством индексов. Был описан и обоснован конечный алгоритм, который определяет неподвижные индексы и их порядки неподвижности вдоль допустимых направлений для данных задач. Приведен пример, иллюстрирующий работу данного алгоритма. Полученный результат усиливает результат, полученный в работе [9], т. е. класс исследуемых задач расширяется от задач линейного полубесконечного программирования до задач выпуклого полубесконечного программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hettich*, *R*. Semi-infinite programming: theory, methods and applications / R. Hettich, K.O. Kortanek // SIAM Reviev. – 1993. – Vol. 35, № 3. – P. 380–429.

2. *Still*, *G*. Generalized semi-infinite programming: Theory and methods / G. Still // European Journal of Operational Research. – 1999. – Vol. 119. – P. 301–313.

3. *Stein*, *O*. On optimality conditions for generalized semi-infinite programming problems / O. Stein, G. Still // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2000. – Vol. 104, № 2. – P. 443–458.

4. *Ruckmann*, *J.J*. First-order optimality conditions in generalized semi-infinite programming / J.J. Ruckmann, A. Shapiro // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1999. – Vol. 101, № 3. – P. 677–691.

5. *Klatte*, *D*. Stable local minimizers in semi-infinite optimization: regularity and second-order conditions / D. Klatte // J. Comput. Appl. Math. – 1994. – Vol. 56. – P. 137–157.

6. *Moldovan*, *A*. On Regularity for Constrained Extremum Problems. Part 2: Necessary Optimality Conditions / A. Moldovan, L. Pellegrini // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2009. – Vol. 142. – P. 165–183.

7. *Kostyukova*, *O.I.* Sufficient optimality conditions for convex semi-infinite programming / O.I. Kostyukova, T.V. Tchemisova // Optimization Methods and Software. – 2010. – Vol. 25, № 2. – P. 279–297.

8. *Kostyukova*, *O.I.* On the algorithm of determination of immobile indices for convex SIP problems / O.I. Kostyukova, T.V. Tchemisova, S.A. Yermalinskaya // International Journal on Mathematics and Statistics. – 2008. – Vol. 13, № 8. – P. 13–33.

9. *Kostyukova*, *O.I.* A constructive algorithm for determination of immobile indices in convex SIP problems with polyhedral index sets / O.I. Kostyukova, T.V. Tchemisova. – Aveiro, 2012. – 17 p. – (Preprint / Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, Mathematical Department, University of Aveiro).

10. *Kostyukova*, *O.I.* Implicit optimality criterion for convex SIP problem with box constrained index set / O.I. Kostyukova, T.V. Tchemisova // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 20. – P. 475–502.

Поступила в редакцию 06.06.14.